Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas 3 (MA-1116)
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Enero-Marzo 2024

Tipo Único

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. **(Total: 10 ptos.)** Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 |\ x = y - z,\ w = y,\ z = 0 \right\}.$$

   a) **(6 ptos.)** Encuentre una base ortonormal y la dimensión de $H^{\perp}$.

   b) **(4 ptos.)** Dado el vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ calcule la proyección ortogonal de $\boldsymbol{v}$ sobre H y la proyección ortogonal de $\boldsymbol{v}$ sobre $H^{\perp}$.

2. **(Total: 10 ptos.)** Dada la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(p(x)) = \Big(p(2) - p(1)\Big)\boldsymbol{i} + \Big(p(1) - p'(1)\Big)\boldsymbol{j} + \Big(p'(1) - mp(0)\Big)\boldsymbol{k},$$

para todo $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2$.

   a) **(5 ptos.)** Encuentre los valores de m para los cuales la nulidad de T es igual a 1.

   b) **(5 ptos.)** Para el valor o los valores de m obtenido en el apartado anterior, encuentre una base para el núcleo, una base para la imagen, la nulidad y el rango de T.

3. **(Total: 9 ptos.)** Determinar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En caso afirmativo, expresar las matrices correspondientes que garantizan la diagonalización.

4. **(3 ptos. c/u)** Responda **VERDADERA** o **FALSA** a las siguientes proposiciones:

   a) Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que A^2 es una matriz diagonalizable, entonces A^4 es diagonalizable.

   b) Sea $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ una transformación dada por

   $$T(p(t)) = tp(t) + t^2$$

   para $p \in \mathbb{P}_1$. Entonces, T es una transformación lineal.

Solución

1. *a*) A partir de su definición es posible identificar directamente un conjunto generador para H, pues H esta compuesto de vectores de la forma [1]

$$y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R},$$

y por ende

$$H = \operatorname{gen}\left(\{\boldsymbol{k}\}\right), \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos trivialmente que una base ortonormal $\mathcal{B}_H$ para H es dada por

$$\mathcal{B}_H = \left\{ \frac{\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{k}\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k} \right\},$$

y como consecuencia, $\dim H = 1$. Finalmente, $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim \mathbb{R}^4$ implica que $\dim H^{\perp} = 4 - 1 = 3$.

b) Ahora que una base ortonormal es conocida para H, calcular la proyección de $\boldsymbol{v}$ sobre H es solo cuestión de efectuar el cómputo

$$\operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}_H} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \left\langle \boldsymbol{v}, \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A pesar de no conocer una base o conjunto generador para $H^{\perp}$, aún es posible calcular la proyección de $\boldsymbol{v}$ sobre $H^{\perp}$ de forma directa empleando la relación sobre operadores de proyección dada según

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{v}) + \operatorname{Proj}_{H^{\perp}}(\boldsymbol{v}).$$

[1] La condición $z = 0$ ya fue incorporada en el resto de las ecuaciones

De esta manera,

$$\operatorname{Proj}_{H^\perp}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - \operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{B}_H} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - \left\langle \boldsymbol{v}, \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}.$$

Finalmente,

$$\operatorname{Proj}_{H^\perp}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *a)* La nulidad de T puede obtenerse directamente recordando la definición de $\ker T$, dada según

$$\ker(T) = \{p \in \mathbb{P}_2 \mid T(p) = \boldsymbol{0}\}.$$

Así, tomando a $p \in \mathbb{P}_2$ como un polinomio arbitrario $p(x) = ax^2 + bx + c$, la ecuación $T(p) = \boldsymbol{0}$ es equivalente a

$$(3a+b)\,\boldsymbol{i} + (c-a)\,\boldsymbol{j} + (2a+b-mc)\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}.$$

A su vez, esta representa un sistema lineal homogéneo dado por

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definamos

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

Es sabido como propiedad de los sistemas lineales homogéneos que el conjunto de ecuaciones anterior solo admite soluciones no triviales si el determinante de la matriz Q es nulo. De esta manera, evaluando su determinante obtenemos que

$$\det Q = -1 - m.$$

Por tanto, tomar $m = -1$ implica que este sistema (y por extensión T) admita soluciones no triviales a la ecuación $T(p) = \boldsymbol{0}$. Consideremos ahora Q con $m = -1$.

Aplicando operaciones elementales por fila el sistema puede ser reducido a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y de aquí que los polinomios $p \in \mathbb{P}_2$ que satisfacen $T(p) = \mathbf{0}$ son aquellos tales que

$$a = c, \quad b = -3c.$$

Es decir, polinomios de la forma

$$p(x) = cx^2 - 3cx + c.$$

Finalmente, podemos afirmar que

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\left(\left\{x^2 - 3x + 1\right\}\right), \quad \text{con} \quad \operatorname{nulidad}(T) = 1$$

si $m = -1$.

b) Ahora que es sabido del apartado anterior el conjunto generador de $\ker(T)$ y la nulidad de T, podemos obtener el rango de T directamente invocando el teorema de rango-nulidad. Así,

$$\operatorname{rango}(T) = \dim \mathbb{P}_2 - \operatorname{nulidad}(T) = 3 - 1 = 2.$$

Luego, como $\ker(T)$ es generado por un único vector de $\mathbb{P}_2$, se tiene que

$$\mathcal{B}_{\ker(T)} = \left\{x^2 - 3x + 1\right\}$$

es una base para el núcleo de T. De forma similar, la imagen de T puede construirse a partir de la aplicación de T sobre la base canónica de $\mathbb{P}_2$,

$$\operatorname{imag}(T) = \operatorname{gen}\left(\left\{T(1),\, T(x),\, T(x^2)\right\}\right).$$

Esto equivale al espacio columna de Q para $m = -1$, que ya hemos obtenido anteriormente. A saber,

$$\operatorname{imag}(T) = \operatorname{gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Para obtener una base correspondiente a este conjunto generador, basta con reconocer que $T(x^2)$ es linealmente dependiente de $T(1)$ y $T(x)$, pues

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Como $T(1)$ y $T(x)$ son linealmente independientes entre sí, finalmente se obtiene que

$$\mathcal{B}_{\mathrm{imag}(T)} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

es una base para la imagen de T.

3. Para determinar si la matriz A es diagonalizable, el primer paso a tomar es calcular el polinomio característico de A y examinar sus raíces, las cuales deberán corresponder a los autovalores de A. Puede ser tentador observar que A tiene dos filas repetidas e intentar especular alguna observación sobre el rango de A, o que por ser una matriz singular esta no podría ser diagonalizable, pero esto es incorrecto. Que A sea *diagonalizable* significa que existe una base ordenada para (en este caso) $\mathbb{R}^3$ compuesta exclusivamente por autovectores de A, y esta es la afirmación que intentaremos probar o refutar.

   El polinomio característico de A puede ser calculado directamente mediante [2]

$$\det(\lambda I_3 - A) = [(\lambda-1)(\lambda-1)-1](\lambda-2) = \lambda(\lambda-2)^2.$$

   donde I_3 es la matriz identidad de dimensión 3×3 y $\lambda\in\mathbb{R}$. Una vez calculados los autovalores $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$, los autoespacios correspondientes pueden calcularse también de forma directa.

   - Para E_0, $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\2&-2&2&0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1/2&0\\0&1&-1/2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

[2] Observe que el determinante de A puede calcularse a lo largo de la tercera columna y ahorrar tiempo en cálculos innecesarios aprovechando las entradas nulas.

y por tanto E_0 es dado según

$$E_0 = \text{gen}\left(\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\right).$$

- Para E_2, $2I_3 - A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\\-2 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

y por tanto E_2 es dado según

$$E_2 = \text{gen}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

De esta manera, podemos proponer una base ordenada para $\mathbb{R}^3$ usando los autovectores determinados anteriormente,

$$\mathcal{B}_\lambda = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

puesto que los autovectores son linealmente independientes entre sí, y el número de vectores en $\mathcal{B}_\lambda$ equivale a la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$. Llegado a este punto, hemos mostrado que A en efecto es diagonalizable, y solo queda calcular su forma diagonal.

Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y P la matriz 3×3 de cambio de base de $\mathcal{B}_\lambda$ a $\mathcal{B}$. Entonces,

$$P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y la forma diagonal de A es dada según

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{donde} \quad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

4. *a*) Sea $M = A^2$. Según el enunciado M es diagonalizable, y por tanto existen matrices P y D tales que

$$M = PDP^{-1},$$

donde D es una matriz diagonal de orden n cuyas entradas son los autovalores de M, y P es una matriz invertible de orden n cuyas columnas son los n autovectores de M, de acuerdo a la definición de diagonalizabilidad. Así, considere $M^2 = A^4$. Esta matriz es dada por $M^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})$. Empleando la asociatividad del producto de matrices, obtenemos que

$$M^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = (PD)(P^{-1}P)(DP^{-1}) = PD^2P^{-1},$$

puesto que P es invertible. De esta manera, puede verse que en efecto M^2 es diagonalizable, siendo D^2 la matriz diagonal correspondiente: los autovectores de M^2 son precisamente los mismos autovectores de M, así que la matriz P es la correcta, y los autovalores de M^2 son precisamente los autovalores de M al cuadrado, puesto que si $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ es un autovector de M con autovalor λ, entonces

$$M^2\boldsymbol{u} = M(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda^2\boldsymbol{u}.$$

Así, D^2 es una matriz diagonal cuyas entradas son éstos autovalores de M^2. Finalmente, se concluye que la afirmación es **VERDADERA**.

b) Para explorar esta proposición, tenemos al menos dos estrategias. La primera es comparar T contra la definición de una transformación lineal directamente. La segunda es emplear un conocido lema de las transformaciones lineales que establece que si $P : V \to W$ es una transformación lineal, entonces

$$P(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

Es decir, toda transformación lineal envía el elemento identidad de V al elemento identidad de W. Exploremos ambas posibilidades.

1) **Primer método:** sean p, $q \in \mathbb{P}_1$. Vea que

$$T(p(t) + q(t)) = tp(t) + tq(t) + t^2.$$

Por otro lado,

$$T(p(t)) + T(q(t)) = tp(t) + tq(t) + 2t^2.$$

Como

$$T(p(t)+q(t)) \neq T(p(t))+T(q(t)),$$

se tiene entonces que T **no es** una transformación lineal. Alternativamente, también podría usarse el hecho de que

$$T(kp(t)) = ktp(t)+t^2 \neq kT(p(t)),\ k \in \mathbb{R},$$

puesto que esto también contradice la definición de transformación lineal.

2) **Segundo método:** el elemento identidad tanto de $\mathbb{P}_1$ como $\mathbb{P}_2$ es simplemente el polinomio nulo $p(t)=0$. Así, aplicando T sobre el elemento identidad de $\mathbb{P}_1$ se tiene que

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{P}_1}) = t^2, \quad \text{y por ende} \quad T(\mathbf{0}_{\mathbb{P}_1}) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{P}_2}.$$

De esta manera, empleando contraposición lógica sobre el lema mencionado, obtenemos sin más que T **no es** una transformación lineal.

Finalmente, se concluye que la afirmación es **FALSA**.

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Samuel Alonso** para **GECOUSB**

Samuel Alonso
14-10028
Lic. en Física

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **alonso.smontenegro@gmail.com**